

Dr inż. Jadwiga PISULA, jpisula@prz.edu.pl  
Mgr inż. Bartłomiej SOBOLEWSKI, bsobolewski@prz.edu.pl  
Politechnika Rzeszowska, Wydział Budowy Maszyn i Lotnictwa

## METODA HYBRYDOWA TWORZENIA MODELU 3D-CAD STOŻKOWEGO KOŁA ZĘBATEGO O KOŁOWO-ŁUKOWEJ LINII ZĘBA

**Streszczenie:** Geometria powierzchni bocznej koła stożkowego wynika bezpośrednio z zastosowanej metody obróbki, dobranych parametrów ustawczych oraz geometrii narzędzia. W artykule przedstawiono metodę powierzchniowo-bryłową tworzenia modelu 3D kół zębatych stożkowych o kołowo-łukowej linii zęba. Podano sposób otrzymywania powierzchni bocznej kół w postaci zbioru punktów, których współrzędne uzyskano z zastosowania kinematycznej teorii obwiedni. Przedstawiono również sposób łączenia powierzchni z modelem bryłowym otoczki koła. Wygenerowano modele kół dla danych dotyczących przekładni stożkowej obejmujących geometrię pary kół, geometrię narzędzi i parametry obróbki.

**Słowa kluczowe:** koła stożkowe o łukowej linii zęba, matematyczny model nacinania uzębienia, model 3D-CAD.

## HYBRID METHOD OF CREATING 3D CAD MODEL OF SPIRAL BEVEL GEAR

**Abstract:** The geometry of the flank surface of the bevel gear direct result of the cutting method, selected setup parameters and tool geometry. This paper presents a method of surface-solid 3D model creation spiral bevel gears. Discloses a process for the preparation of the flank surface of the gear in the form of a set of points whose coordinates are obtained from the application of the theory of the kinematic envelope. Also describes how to connect the surface of tooth space with solid model gear. Generated models of spiral bevel gear for data including geometry of gear pair, tool geometry and cutting parameters.

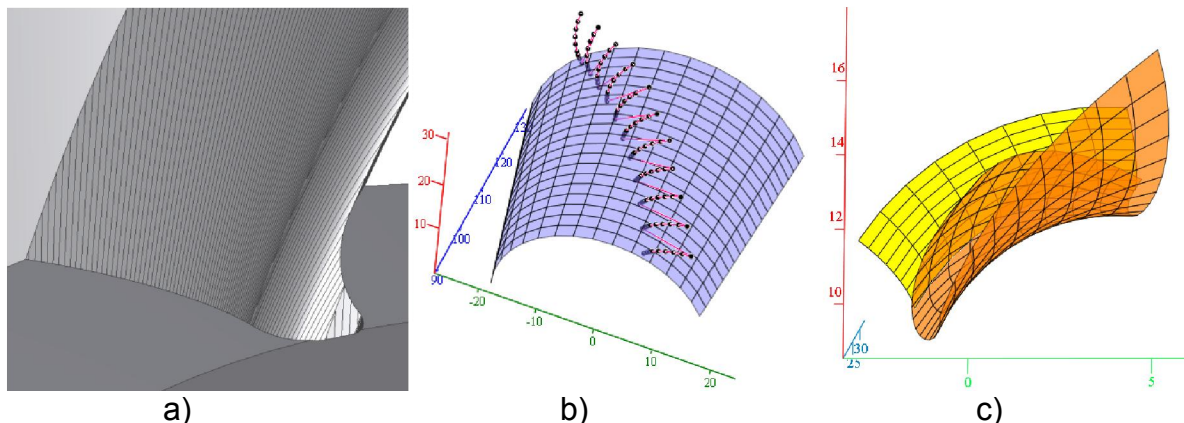
**Key words:** spiral bevel gear, mathematical model of cutting teeth, model 3D-CAD.

### 1. WPROWADZENIE

Skomplikowana geometria członów przekładni stożkowej oraz narzędzi do ich obróbki, a także rozbudowana kinematyka nacinania powodują, że otrzymane wręby kół mają złożoną geometrię. Uzasadnione jest w związku z tym opracowanie takiego modelu kół przekładni, który w sposób wiarygodny będzie odzwierciedlał rzeczywistą geometrię powierzchni, generowaną dla konkretnych zastosowań. Wirtualne modele przekładni służą głównie do analiz współpracy ząbienia bez obciążenia (m.in. w systemach CAD) oraz pod obciążeniem (w programach korzystających z MES) [1][3][5]. Analiza współpracy jest niezbędnym elementem na etapie projektowania przekładni, ponieważ pozwala we wczesnym stadium korygować jej właściwości użytkowe. Modele pojedynczych kół wykorzystywane są jako odniesienie zarówno przy pomiarach rzeczywistych kół jak i kontroli geometrii na poszczególnych etapach obróbki. Zgodność geometrii uzyskanej z założoną jest jednym z warunków kwalifikacji jakości wyrobu [2][4].

Do wykonania modelu koła stożkowego niezbędna jest geometria otoczki koła, którą traktuje się jako bryłę bazową. Kluczowym elementem modelu koła zębatego o kołowo-łukowej linii zęba jest powierzchnia wrębu, w skład której wchodzi powierzchnie wklęsła i wypukła boczna oraz powierzchnia dna wrębu. Powierzchnia wrębu jest odwzorowaniem geometrii narzędzia, parametrów ustawczych obrabiarki oraz kinematyki procesu nacinania. Istnieją dwie możliwości otrzymywania modeli wrębów kół stożkowych o kołowo-łukowej linii zęba: model bryłowy uzyskiwany w wyniku symulacji obróbki w określonej ilości kroków oraz model matematyczny powierzchni bocznej uzębienia w postaci równania parametrycznego lub siatki punktów[6][7][8][9] (rys. 1). Model bryłowy iteracyjny nie nadaje się jednak do analiz kinematyki przekładni oraz analiz

wykorzystującej MES. Modelu matematycznego w postaci równania parametrycznego nie można z kolei bezpośrednio przenieść do systemu CAD ze względu na rozbudowany zapis. W tej sytuacji występuje konieczność wygenerowania powierzchni w oparciu o punkty uzyskane z modelu matematycznego, z równania parametrycznego powierzchni albo z rozwiązania numerycznego. Otrzymaną powierzchnię wykorzystuje się do wykonania modelu bryłowego metodą hybrydową.

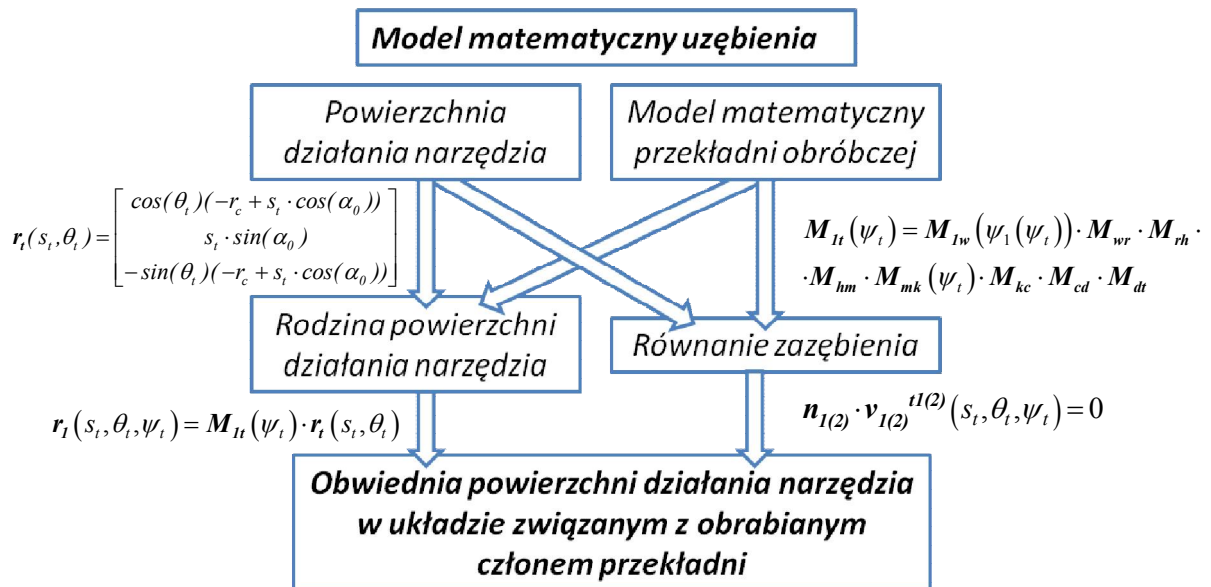


Rys.1. Powierzchnia boczna zęba koła stożkowego o kołowo-lukowej linii zęba uzyskana: a) w wyniku symulacji obróbki, b) jako siatka punktów reprezentująca rozwiązanie numeryczne, c) jako równanie parametryczne.

## 2. POWIERZCHNIA UZYSKIWANA Z MODELU MATEMATYCZNEGO UZĘBIENIA

Do uzyskania powierzchni wrębu kół wykorzystano model matematyczny uzębienia. Model ten opiera się na kinematycznej teorii obwiedni F. Litvina [5]. Rozwiązując układ równań zawierający równanie zazębienia oraz równanie rodziny powierzchni działania narzędzia otrzymujemy rozwiązanie numeryczne w postaci współrzędnych punktów definiujących powierzchnię boczną zębów lub w postaci równania parametrycznego powierzchni (w niewielu przypadkach, ze względu na złożoność rozważanego problemu). Do określenia wspomnianego powyżej układu równań konieczne jest zdefiniowanie matematycznego modelu obróbki odzwierciedlającego geometrię i kinematykę metody nacinania kół oraz równanie powierzchni narzędzia. Schemat blokowy ilustrujący zależność poszczególnych składowych modelu matematycznego uzębienia wraz z wzorami przedstawiono na rys. 2.

Do modelu matematycznego uzębienia, z którego otrzymuje się składowe powierzchni wrębu wprowadza się zestaw danych obejmujących geometrię kół i złożonej przekładni, geometrię narzędzi oraz parametry ustawcze obróbki koła i zębniaka (rys. 3). Po wprowadzeniu w/w danych program wyznacza współrzędne siatki punktów stanowiące obwiednię powierzchni działania narzędzia a więc poszukiwaną powierzchnię boczną zęba. Na rys. 4 przedstawiono przykładowe pliki współrzędnych punktów eksportowane z programu Mathcad do programu Excel, które z kolei wczytywane są jako punkty do programu Catia przy użyciu specjalnego makra (rys. 5a.).



Rys. 2. Schemat blokowy otrzymywania powierzchni boku zęba koła.

GeomOutput :=		UstawGOutput :=		UstawPOutput :=	
Kod	ZN	IB	OB	WK	WP
z1	z2			OB	IB
PH	GH	Kod	Kod	Kod	Kod
a	Σ	GH	GH	PH	PH
β <sub>m</sub>	α <sub>o</sub>	d <sub>c02</sub>	d <sub>c02</sub>	d <sub>c01OB</sub>	d <sub>c01IB</sub>
R <sub>m</sub>	R <sub>e</sub>	W <sub>2</sub>	W <sub>2</sub>	W <sub>A1OB</sub>	W <sub>A1IB</sub>
b	c	α <sub>2IB</sub>	α <sub>2OB</sub>	α <sub>1OB</sub>	α <sub>1IB</sub>
δ <sub>1</sub>	δ <sub>2</sub>	r <sub>w2IB</sub>	r <sub>w2OB</sub>	r <sub>w1OB</sub>	r <sub>w1IB</sub>
δ <sub>r1</sub>	δ <sub>r2</sub>	P <sub>w2IB</sub>	P <sub>w2OB</sub>	P <sub>w1OB</sub>	P <sub>w1IB</sub>
θ <sub>r1</sub>	θ <sub>r2</sub>	U <sub>2</sub>	U <sub>2</sub>	U <sub>1OB</sub>	U <sub>1IB</sub>
θ <sub>a1</sub>	θ <sub>a2</sub>	q <sub>2</sub>	q <sub>2</sub>	q <sub>1OB</sub>	q <sub>1IB</sub>
h <sub>c</sub>	h <sub>m</sub>	δ <sub>m2</sub>	δ <sub>m2</sub>	δ <sub>m1OB</sub>	δ <sub>m1IB</sub>
h <sub>ae1</sub>	h <sub>ae2</sub>	XP <sub>2</sub>	XP <sub>2</sub>	XP <sub>1OB</sub>	XP <sub>1IB</sub>
h <sub>re1</sub>	h <sub>re2</sub>	XB <sub>2</sub>	XB <sub>2</sub>	XB <sub>1OB</sub>	XB <sub>1IB</sub>
h <sub>am1</sub>	h <sub>am2</sub>	E <sub>m2</sub>	E <sub>m2</sub>	E <sub>m1OB</sub>	E <sub>m1IB</sub>
h <sub>fm1</sub>	h <sub>fm2</sub>	u <sub>c2</sub>	u <sub>c2</sub>	u <sub>c1OB</sub>	u <sub>c1IB</sub>
h <sub>ai1</sub>	h <sub>ai2</sub>			K <sub>M0B</sub>	K <sub>M1B</sub>
h <sub>ri1</sub>	h <sub>ri2</sub>				

Rys. 3. Dane wprowadzane do modelu matematycznego uzębienia

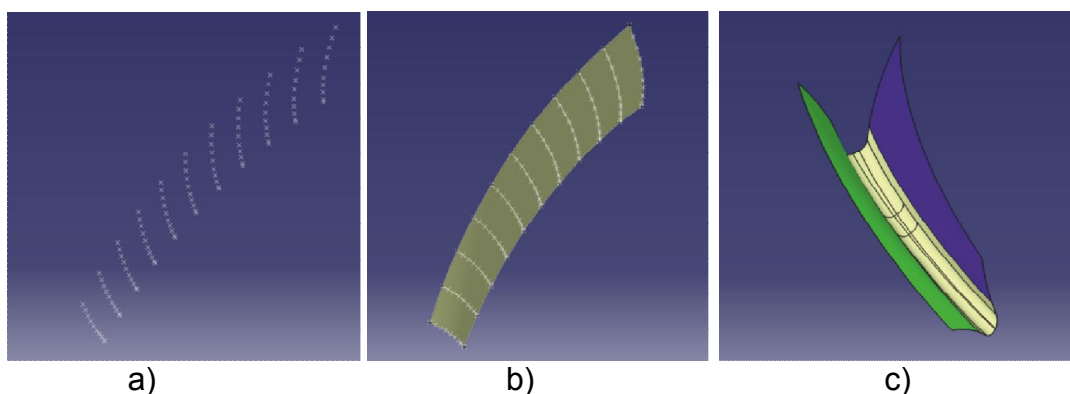
A1 f <sub>a</sub> 12,8331876				A1 f <sub>a</sub> 11,4335162			
A	B	C	D	A	B	C	D
1	12,8331881	-4,406364	41,395658	1	11,433516	-7,306262	41,395658
2	12,885336	-4,440425	41,374878	2	11,497588	-7,318109	41,374878
3	13,039106	-4,549973	41,312536	3	11,692357	-7,349104	41,312536
4	13,189278	-4,669093	41,250195	4	11,890768	-7,373407	41,250195
5	13,336153	-4,796573	41,187854	5	12,092601	-7,391149	41,187854
6	13,53262	-4,983705	41,102304	6	12,374785	-7,404986	41,102304
7	13,72338	-5,183688	41,016754	7	12,662578	-7,406814	41,016754
8	13,908507	-5,395507	40,931204	8	12,955553	-7,396737	40,931204
9	14,087999	-5,618386	40,845655	9	13,253306	-7,374813	40,845655
10	14,261806	-5,851701	40,760105	10	13,555451	-7,341067	40,760105
11	13,594519	-3,504233	42,953398	11	12,354481	-6,667637	42,953398
12	13,65473	-3,536094	42,930596	12	12,425398	-6,67571	42,930596
13	13,832841	-3,64086	42,86219	13	12,640737	-6,694411	42,86219
14	14,007595	-3,75732	42,793783	14	12,859737	-6,705022	42,793783
15	14,179268	-3,883859	42,725377	15	13,082142	-6,707724	42,725377
16	14,408168	-4,070488	42,632283	16	13,389865	-6,698932	42,632283
17	14,631707	-4,27222	42,539189	17	13,702921	-6,675978	42,539189
18	14,849876	-4,487856	42,446095	18	14,020811	-6,639015	42,446095
19	15,062593	-4,716491	42,353001	19	14,343061	-6,588142	42,353001
20	15,269738	-4,957401	42,259906	20	14,669213	-6,523414	42,259906
21	14,283118	-2,551339	44,511138	21	13,229479	-5,957992	44,511138
22	14,351275	-2,579987	44,486314	22	13,306988	-5,961501	44,486314
23	14,55358	-2,677154	44,411843	23	13,542038	-5,965489	44,411843

Rys. 4. Przykładowe pliki współrzędnych punktów definiujących powierzchnie składowe wrębów zębniaka i koła stożkowego wyznaczone z równania obwiedni.

### 3. BUDOWA MODELU BRYŁOWEGO METODĄ HYBRYDOWĄ

Na wczytanych punktach do programu CAD wyznaczonych z modelu matematycznego uzębienia tworzy się profile, na których rozpina się powierzchnię (rys.5b). Nie ma konieczności stosowania prowadnic, ponieważ liczba punktów jest jednakowa dla każdego profilu. W przypadku braku kilku punktów wynikającego np. z podcięcia zęba u podstawy, konieczne jest zastosowanie prowadnic.

Otrzymanie powierzchni całego wrębu jest możliwe dopiero po rozpięciu powierzchni nie tylko na powierzchniach bocznych, które biorą udział w zazębieniu, ale także na powierzchniach pochodzących od zaokrąglenia naroża oraz krawędzi narzędzia nacinającej dno wrębu. Po przycięciu powierzchni wykonuje się ich łączenie (rys. 5c). Jest to metoda najdokładniejsza tworzenia modelu koła stożkowego o kołowo-łukowej linii zęba.

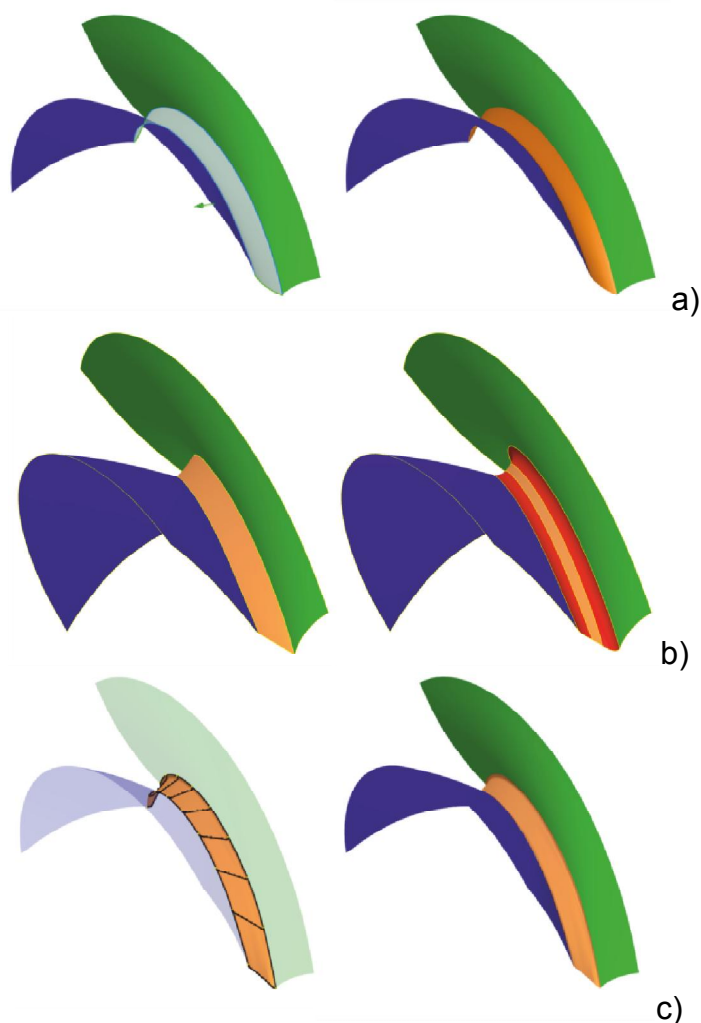


Rys. 5. Budowa modelu powierzchniowego uzębienia w systemie CAD a) wczytany zbiór punktów definiujących powierzchnię wklęsłą zębownika stożkowego, b)rozpięta powierzchnia na zbiorze punktów, c)powierzchnia wrębu utworzona na bazie powierzchni bocznych: wklęsłej i wypukłej oraz powierzchni dna wrębu.

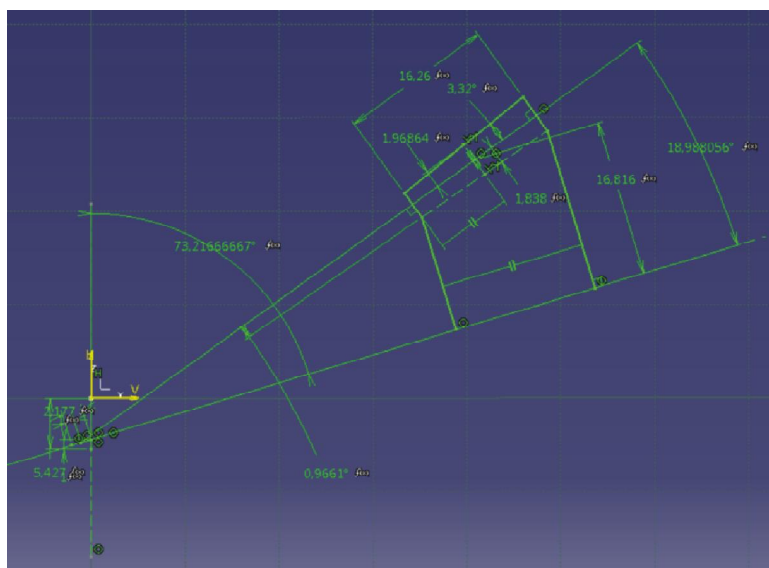
W celu uproszczenia modelu i nie podważając możliwości określonego zastosowania, bierze się pod uwagę jedynie powierzchnię boczną uzębienia, która obejmuje zakres możliwej współpracy pary kół. Wówczas powierzchnia dna wrębu koła jest jedynie przybliżona. Na rys. 6a i 6b zaprezentowano sposoby uproszczenia powierzchni dna wrębu. Mianowicie na rys. 6a dokonuje się ekstrapolacji powierzchni bocznych w kierunku dna a następnie łączy się powierzchnią tak, aby spełnić warunki ciągłości ma poziomie wektorów stycznych i krzywizn. W przypadku rys. 6b po wykonaniu ekstrapolacji powierzchni bocznych do fragmentu powierzchni stożka stóp koła stosuje się zaokrąglenie pomiędzy powierzchniami. Modele uproszczone wykorzystuje się do analizy współpracy przekładni bez obciążenia TCA – tooth contact analysis.

Korzystając z danych wczytywanych do modelu matematycznego zdefiniowano parametryczny szkic otoczki koła i zębownika (rys. 7.). Gotowe bryły otoczek kół otrzymuje się poprzez obrót względem odpowiedniej osi. Korzystając z przygotowanych powierzchni wrębów przycina się nimi bryły otoczek, a następnie korzystając z szyku kołowego uzyskuje się gotowe modele bryłowe kół, które odzwierciedlają ich rzeczywistą geometrię.

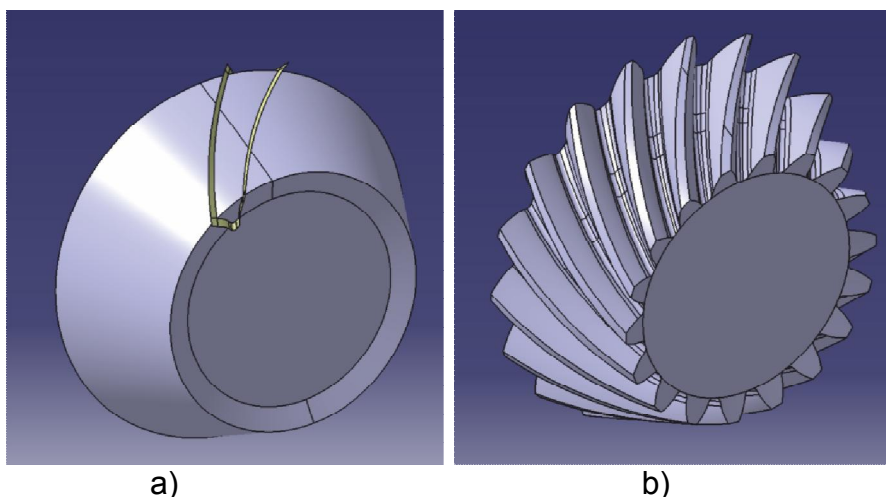




Rys. 6. Metody stosowane do budowy powierzchni dna wrębu: a) połączenie powierzchni z zachowaniem ciągłości, b) zaokrąglenie powierzchni przecięcia ekstrapolowanych powierzchni bocznych z powierzchnią stożka stóp, c) połączenie powierzchni składowych wrębu (bocznych, od zaokrągłeń i dna) otrzymanych z modelu matematycznego uzębienia.



Rys. 7. Parametryczny szkic otoczki zębniaka utworzony w oparciu o wczytane dane geometryczne



Rys. 8. a) Przycięcie bryły otoczki zębniaka powierzchnią wrębu, b) otrzymana bryła zębniaka przekładni stożkowej o kołowo-łukowej linii zęba

#### 4. WNIOSKI

Znając możliwości zastosowania oraz dokładności wykonanych modeli bryłowych metodą hybrydową sformułowano następujące wnioski:

1. Metoda hybrydowa pozwala na otrzymanie modeli 3D CAD kół stożkowych o kołowo-łukowej linii zęba o wysokiej dokładności odwzorowania rzeczywistego koła.
2. Modele bryłowe otrzymywane metodą hybrydową charakteryzują się występowaniem gładkich powierzchni bocznych co umożliwia jego zastosowanie do późniejszych analiz współpracy przekładni stożkowych w systemach CAD oraz z wykorzystaniem MES.
3. Wykonany model stanowi również odniesienie przy pomiarach rzeczywistych kół jako kontrola na poszczególnych etapach obróbki i jeden z warunków akceptowania wyrobu do sprzedaży. Jest to wyjątkowo istotne w przypadku produkcji lotniczej.
4. Dodatkową zaletą stosowania metody hybrydowej jest stosunkowo niewielki rozmiar otrzymywanych plików.

#### LITERATURA:

- [1]. Argyris J., Fuentes A., Litvin F.L.: Computerized integrated approach for design and stress analysis of spiral bevel gears. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Volume 191, Issue 11-12, 4 January 2002, pages 1057-1095;
- [2]. Cao X., Wang J., Zhang H.: Geometric error measurement of spiral bevel gears and experimental test. *China Mechanical Engineering*, Volume 20, Issue 15, 10 August 2009, pages 1799-1801;
- [3]. Eritenel T., Parker R.G.: Computational nonlinear vibration analysis of gear pairs using a three-dimensional model. *Proceedings of the ASME Design Engineering Technical Conference*, Volume 6, 2009, pages 149-165;
- [4]. Fang Z.-D., Cao X.-M., Zhang J.-L.: Measuring date processing of aviation spiral bevel gears by using coordinate measurement. *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica*, Volume 28, Issue 2, March 2007, pages 456-459;
- [5]. Litvin F. L., Fuentes A.: *Gear geometry and applied theory*. Second edition. Cambridge University Press, New York, 2004;

- [6]. Marciniak A., Pisula J., Płocica M., Sobolewski B.: Projektowanie przekładni stożkowych z zastosowaniem modelowania matematycznego i symulacji w środowisku CAD. *Mechanik*, nr 7/2011, s. 602-605;
- [7]. Marciniak A., Pisula J., Sobolewski B.: Modelowanie kół zębatach w środowisku systemowym 3D-CAD, rozdział 1 Monografii pod red. G. Budzika „Określenie chwilowego śladu styku przekładni zębatach z zastosowaniem metod szybkiego prototypowania”, Oficyna Wydawnicza Politechniki Rzeszowskiej, Rzeszów 2011, s. 9-47;
- [8]. Marciniak A., Sobolewski B.: Method of spiral bevel gear tooth contact analysis performed in CAD environment. *Aircraft Engineering and Aerospace Technology*, Volume 85, Issue 6, 2013, Article number 17097833, pages 467-474;
- [9]. Skawiński P., Siemiński P., Pomianowski R.: Generowanie modeli bryłowych uzębienia stożkowych za pomocą symulacji oprogramowanych w systemie 3D CAD. *Stowarzyszenie Inżynierów i Techników Mechaników Polskich, Mechanik z.11*, 2011, s. 922.

*Badania realizowane w ramach Projektu "Nowoczesne technologie materiałowe stosowane w przemyśle lotniczym", Nr POIG.01.01.02-00-015/08-00 w Programie Operacyjnym Innowacyjna Gospodarka (PO IG). Projekt współfinansowany przez Unię Europejską ze środków Europejskiego Funduszu Rozwoju Regionalnego.*

*Financial support of Structural Funds in the Operational Programme - Innovative Economy (IE OP) financed from the European Regional Development Fund - Project "Modern material technologies in aerospace industry", Nr POIG.01.01.02-00-015/08-00 is gratefully acknowledged.*